APELLIDOS: NOMBRE:

Sucesiones y series de funciones.

Ejercicio 1. Resuelve las siguientes cuestiones. Nota:

1. $f_n(x) = e^{-nx^2}, \quad x \in [0,1]$.

Campo de convergencia $A =$	Límite puntual $f(x) =$
¿Es $f_n(x)$ continua en A, $\forall n \in \mathbb{N}$? ☐ Si. ☐ No	¿Es $f(x)$ continua en A ? ☐ Si. ☐ No
¿Es $\{f_n(x)\}$una sucesión monótona? ☐ Si. ☐ No	¿Se puede aplicar el teorema de Dini? ☐ Si, y la convergencia a f es uniforme en A. ☐ No, porque
¿Es $\{f_n(x)\}$ uniformemente acotada? ☐ Si. ☐ No	¿Se puede aplicar el teorema de Arzelà? ☐ Si, y permuta el límite y la integral. ☐ No, porque
¿Es $f_n(x)$ derivable en A, $\forall n \in \mathbb{N}$? ☐ Si. ☐ No	¿Converge uniformemente$\{f_n'(x)\}$ en A? ☐ Si. ☐ No

¿Se puede aplicar el teorema de convergencia uniforme y derivación?   ☐ Si. Por tanto, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente y $f_n' \longrightarrow f'$ uniformemente.   ☐ No, porque

2. $f_n(x) = e^{nx}, \quad x \in [-2,1]$.

Campo de convergencia $A =$	Límite puntual $f(x) =$
¿Es $f_n(x)$ continua en A, $\forall n \in \mathbb{N}$? ☐ Si. ☐ No	¿Es $f(x)$ continua en A ? ☐ Si. ☐ No
¿Es $\{f_n(x)\}$una sucesión monótona? ☐ Si. ☐ No	¿Se puede aplicar el teorema de Dini? ☐ Si, y la convergencia a f es uniforme en A. ☐ No, porque
¿Es $\{f_n(x)\}$ uniformemente acotada? ☐ Si. ☐ No	¿Se puede aplicar el teorema de Arzelà? ☐ Si, y permuta el límite y la integral. ☐ No, porque
¿Es $f_n(x)$ derivable en A, $\forall n \in \mathbb{N}$? ☐ Si. ☐ No	¿Converge uniformemente$\{f_n'(x)\}$ en A? ☐ Si. ☐ No

¿Se puede aplicar el teorema de convergencia uniforme y derivación?   ☐ Si. Por tanto, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente y $f_n' \longrightarrow f'$ uniformemente.   ☐ No, porque

3. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n^2x)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Campo de convergencia $A =$	Límite puntual $f(x) =$
¿Es $f_n(x)$ continua en A, $\forall n \in \mathbb{N}$? ☐ Si. ☐ No	¿Es $f(x)$ continua en A ? ☐ Si. ☐ No
¿Es $\{f_n(x)\}$una sucesión monótona? ☐ Si. ☐ No	¿Se puede aplicar el teorema de Dini? ☐ Si, y la convergencia a f es uniforme en A. ☐ No, porque
¿Es $\{f_n(x)\}$ uniformemente acotada? ☐ Si. ☐ No	¿Se puede aplicar el teorema de Arzelà? ☐ Si, y permuta el límite y la integral. ☐ No, porque
¿Es $f_n(x)$ derivable en A, $\forall n \in \mathbb{N}$? ☐ Si. ☐ No	¿Converge uniformemente$\{f_n'(x)\}$ en A? ☐ Si. ☐ No

¿Se puede aplicar el teorema de convergencia uniforme y derivación?
☐ Si. Por tanto, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente y $f_n' \longrightarrow f'$ uniformemente.
☐ No, porque

4. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Campo de convergencia $A =$	Límite puntual $f(x) =$
¿Es $f_n(x)$ continua en A, $\forall n \in \mathbb{N}$? ☐ Si. ☐ No	¿Es $f(x)$ continua en A ? ☐ Si. ☐ No
¿Es $\{f_n(x)\}$una sucesión monótona? ☐ Si. ☐ No	¿Se puede aplicar el teorema de Dini? ☐ Si, y la convergencia a f es uniforme en A. ☐ No, porque
¿Es $\{f_n(x)\}$ uniformemente acotada? ☐ Si. ☐ No	¿Se puede aplicar el teorema de Arzelà? ☐ Si, y permuta el límite y la integral. ☐ No, porque
¿Es $f_n(x)$ derivable en A, $\forall n \in \mathbb{N}$? ☐ Si. ☐ No	¿Converge uniformemente$\{f_n'(x)\}$ en A? ☐ Si. ☐ No

¿Se puede aplicar el teorema de convergencia uniforme y derivación?
☐ Si. Por tanto, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente y $f_n' \longrightarrow f'$ uniformemente.
☐ No, porque

Ejercicio 2. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ en $[0,+\infty)$ dada por | Nota: |

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n x^n & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{n-1}{nx} & \text{si} \quad 1 < x. \end{cases}$$

1. Halla a_n para que f_n sea continua. | $a_n =$ |

2. Para ese valor, calcula el campo de convergencia y el límite puntual f.

Campo de convergencia $A =$	$f(x) = \begin{cases} \\ \end{cases}$

3. | ¿Es f continua? ☐ Si. ☐ No | ¿Hay convergencia uniforme? ☐ Si. ☐ No |
|---|---|

Ejercicio 3. Estudia la convergencia puntual y uniforme de las siguientes series de funciones, utilizando la prueba M de Weierstrass. Calcula $f(2\pi)$, siendo f la función suma.

| Nota: |

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cos(n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$. **Nota:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n =$	$f(2\pi) =$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n =$	$f(2\pi) =$

Ejercicio 4. Calcula el radio y el campo de convergencia de las siguientes series de potencias.

| Nota: |

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ | $R =$ | Campo = |

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ | $R =$ | Campo = |

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^n}$ | $R =$ | Campo = |

Ejercicio 5. Dada la serie de potencias $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n}$, resuelve las siguientes cuestiones.

Nota:

1. Radio = | Campo =
2. Radio serie derivada = | Campo serie derivada =
3. ¿Converge la serie en $x = 6$?
   □ Si. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2 3^n} =$
   □ No, porque

   ¿Converge la serie en $x = 3$
   □ Si. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 3^n} =$
   □ No, porque
4. $F^k(0) =$
   Explicación:

Ejercicio 6. A partir del desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{1+x^2}$, calcula

Nota:

$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Ejercicio 7. Desarrolla en serie de potencias las siguientes funciones

Nota:

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty}$	$e^x = \sum_{n=1}^{\infty}$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}$	$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}$

Ejercicio 8. A partir del desarrollo en serie de potencias de la función que se indica, halla el desarrollo en serie de la función de la caja.

Nota:

1. A partir de $\ln(1+x)$. $\ln\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}$
2. A partir de $\ln(1+x)$. $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}$
3. A partir de e^x. $2x(e^{3x} + 5x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}$
4. A partir de e^x. $\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}$